

Nombres complexes

Ibrahim Keita

I. DEFINITIONS

1. Forme algébrique

i étant par définition le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$, un nombre complexe est un nombre de la forme $z = a + bi$ où a et b sont des nombres réels.

a est la partie réelle de z notée parfois $Re\ z$. b est la partie imaginaire de z notée parfois $Im\ z$.

▪ L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

2. Forme trigonométrique

▪ Le module du nombre complexe $z = a + bi$ est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

▪ Un argument du nombre complexe $z = a + bi$ (non nul) est l'angle $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$ tel que

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

▪ Puisqu'on peut écrire, pour tout nombre complexe z non nul,

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \text{ on a la forme trigonométrique du nombre complexe } z :$$
$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

où $r = |z|$ est le module et θ un argument de z .

3. Forme exponentielle

Remarquons qu'on peut aussi écrire le nombre complexe z sous sa forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$ en posant $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Cette forme est intéressante car elle est condensée et permet des simplifications de calcul liées aux principales propriétés de la fonction puissance qui s'appliquent ici.

4. Interprétation géométrique

▪ A tout nombre complexe $z = a + bi$ on associe le point $M(a ; b)$.

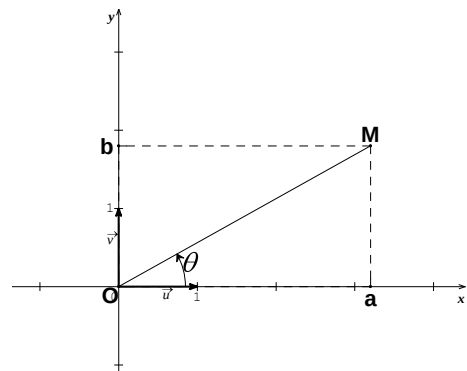
▪ M est l'image de z .

z est l'afixe de M .

On note parfois : $M[z]$.

▪ On dit aussi que l'afixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est z .

▪ $OM = |z| = r$ et $\arg z = \theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.



II. OPERATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

1. Calculs de base

Dans $\mathbb{C}$ on applique les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$ pour l'addition, la multiplication, la division.

- Si $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$ sont deux nombres complexes quelconques :

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \quad \text{par développement et du fait que } i^2 = -1.$$

- $\bar{z} = a - bi$ est le conjugué de $z = a + bi$. On a alors les résultats suivants, faciles à établir (à faire) :

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 \quad \text{et, si } M[z] \text{ et } M'[\bar{z}] \text{ alors les points M et M' sont symétriques par rapport à (O x).}$$

- Pour diviser deux nombres complexes z_1 et z_2 (z_2 non nul), on élimine i du dénominateur :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{1}{|z_2|^2} z_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\text{Exemple. } \frac{1+2i}{3-4i} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \quad (\text{à montrer}).$$

2. Formules d'Euler et de Moivre

- A partir de $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ on a la formule de Moivre

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

- En remarquant que $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ et $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$, le cosinus et le sinus d'un angle s'obtiennent avec les formules d'Euler

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Application. Exprimer $\cos 3t$ en fonction de $\cos t$ et $\sin 3t$ en fonction de $\sin t$.

$$\begin{aligned} \cos 3t + i \sin 3t &= (\cos t + i \sin t)^3 && \text{d'après la formule de Moivre} \\ &= (\cos t)^3 + 3(\cos t)^2(i \sin t) + 3(\cos t)(i \sin t)^2 + (i \sin t)^3 && \text{identité remarquable} \\ &= \cos^3 t + 3i \cos^2 t \sin t - 3 \cos t \sin^2 t - i \sin^3 t \\ &= (\cos^3 t - 3 \cos t(1 - \cos^2 t)) + i(3(1 - \sin^2 t) \sin t - \sin^3 t) && \text{car } \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \\ &= (4 \cos^3 t - 3 \cos t) + i(3 \sin t - 4 \sin^3 t) && \text{par simplification.} \end{aligned}$$

En remarquant que les parties réelles et imaginaires des deux membres sont égales, on obtient

$$\cos 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$$

$$\text{et} \quad \sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t.$$

3. Equation du second degré à coefficients réels

Pour résoudre l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b et c réels ($a \neq 0$), on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, il y a une racine réelle (appelée racine double) $z_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, il y a deux racines complexes $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

4. Equation du second degré à coefficients complexes (Groupement A)

Pour résoudre l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont des nombres complexes ($a \neq 0$), on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, il y a une racine unique (appelée racine double) $z_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, il y a deux racines complexes $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$ où

δ est une racine complexe de Δ ; c'est-à-dire un nombre complexe tel que $\delta^2 = \Delta$.

La méthode pour avoir δ est la suivante : $\Delta = \alpha + i\beta$ est un nombre complexe connu et on cherche le nombre complexe $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$; ce qui revient à chercher les réels x et y .

$$\delta^2 = \Delta \text{ entraîne } |\delta^2| = |\delta|^2 = |\Delta| \text{ soit } x^2 + y^2 = |\Delta|$$

$$\delta^2 = (x + iy)^2 = \Delta, \text{ donc } x^2 - y^2 + 2ixy = \alpha + i\beta \text{ soit, après identification, } x^2 - y^2 = \alpha \text{ et}$$

$$2xy = \beta. \text{ On doit donc résoudre le système : } \begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| & (1) \\ x^2 - y^2 = \alpha & (2) \\ 2xy = \beta & (3) \end{cases}$$

(1)+(2) permet de trouver x^2 puis la racine positive x . En remplaçant x dans (3), on trouve y .

Pour ceux qui sont allergiques aux exposés avec des valeurs littérales, un exemple concret sera plus parlant.

Exemple. Résoudre l'équation du second degré : $z^2 + (1-i)z + (2+i) = 0$.

$\Delta = (1-i)^2 - 4(1)(2+i) = -8 - 6i$. On cherche $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$; donc à résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 & (1) \\ x^2 - y^2 = -8 & (2) \\ 2xy = -6 & (3) \end{cases} \quad (1)+(2) \text{ entraîne } 2x^2 = 2 \text{ ce qui donne } x = 1. \text{ Avec (3), on a } y = -3.$$

Donc une racine complexe δ de Δ est $\delta = 1 - 3i$; et on obtient les racines de l'équation du second degré :

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-(1-i) - (1-3i)}{2(1)} = -1 + 2i \\ z_2 = \frac{-(1-i) + (1-3i)}{2(1)} = -i \end{cases}$$

III. GEOMETRIE (Groupement A)

1. Lignes de niveau

On appelle ligne de niveau k (k étant une constante réelle) pour la fonction f de la variable z l'ensemble des points $M[z]$ tels que $f(z)=k$.

Exemples. Préciser chaque fois la ligne de niveau $f(z) = 1$ et $f(z) = \pi/3$ pour le dernier. (A faire)

- Si $f(z) = \operatorname{Re} z$, les lignes de niveau sont des droites.
- Si $f(z) = \operatorname{Im} z$, les lignes de niveau sont des droites.
- Si $f(z) = |z - z_0|$, les lignes de niveau sont des cercles.
- Si $f(z) = \arg(z - z_0)$, les lignes de niveau sont des demi-droites.

2. Translation

- La translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ fait correspondre à tout point M le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
- La translation conserve les distances, les angles, etc.
- L'image d'une droite est une droite parallèle, l'image d'un cercle est un cercle.
- Si $M[z]$ et son image $M'[z']$, $\vec{u}[u]$, alors l'affixe de $\overrightarrow{MM'}$ sera $z' - z$. Ce qui donne l'expression de la translation dans le plan complexe :

$$z' - z = u \quad \text{ou bien} \quad z' = z + u.$$

3. Rotation

- La rotation r_θ de centre O et d'angle θ fait correspondre à tout point M le point M' tel que $OM = OM'$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$.
- La rotation conserve les distances, les angles, etc.
- L'image d'une droite est une droite, l'image d'un cercle est un cercle.
- Si $M[z]$ et son image $M'[z']$, alors l'expression de la rotation dans le plan complexe sera $z' = e^{i\theta} z$.

4. Homothétie

- L'homothétie de centre O et de rapport k fait correspondre à tout point M le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.
- L'homothétie conserve les angles mais multiplie les distances par $|k|$.
- L'image d'une droite est une droite parallèle, l'image d'un cercle est un cercle.
- Si $M[z]$ et son image $M'[z']$, alors l'expression de l'homothétie dans le plan complexe sera $z' = kz$.

5. Similitude

- La similitude directe de centre O de rapport k et d'angle θ fait correspondre à tout point M le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$.
- La similitude conserve les angles mais multiplie les distances par $|k|$.
- L'image d'une droite est une droite, l'image d'un cercle est un cercle.
- Si $M[z]$ et son image $M'[z']$, alors l'expression de la similitude dans le plan complexe sera $z' = ke^{i\theta}z$.

6. Symétrie d'axe Ox

- La symétrie d'axe Ox fait correspondre à tout point M son symétrique M' par rapport à l'axe des abscisses.
- La symétrie conserve les distances, la valeur absolue des angles, etc.
- L'image d'une droite est une droite, l'image d'un cercle est un cercle.
- Si $M[z]$ et son image $M'[z']$, alors l'expression de la symétrie d'axe Ox dans le plan complexe sera $z' = \bar{z}$.

7. Inversion complexe

- L'inversion complexe I fait correspondre à tout point $M \neq O$ le point M' tel que $OM \times OM' = 1$ et les demi-droites $[OM)$ et $[OM')$ sont symétriques par rapport à la droite (Ox) .
- Si $M[z]$ et son image $M'[z']$, alors l'expression de l'inversion complexe dans le plan complexe sera $z' = \frac{1}{z}$.
- L'inversion complexe I vérifie $I \circ I = I^2 = id$ c'est-à-dire $I^{-1} = I$.
- L'image d'une droite passant par O (mais privée de O) est une droite (privée de O) symétrique par rapport à la droite (Ox) .

L'image d'une droite ne passant pas par O est un cercle de diamètre $[OA']$ (privé de O) où A' est l'image du point A projeté orthogonal de O sur la droite. La réciproque est vraie puisque $I^{-1} = I$.