

CALCUL VECTORIEL

Ibrahim Keita

I. GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. Opérations sur les vecteurs

a) Pour trois points A, B et C quelconques on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (Relation de Chasles).

b) Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$, on a :

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} \quad (\text{associativité})$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \quad (\text{commutativité}).$$

2. Coordonnées

Dans le plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées d'un point M seront notées $M(x; y)$ et celles d'un vecteur $\vec{u}$ seront notées $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Remarquons qu'on aurait la même chose dans l'espace avec, comme seule différence, trois coordonnées au lieu de deux.

a) Si $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ alors $(\vec{u} + \vec{v}) \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix}$, $(\lambda \vec{u}) \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$.

b) Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors les coordonnées du vecteur d'origine A et d'extrémité B seront $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et le milieu I de $[AB]$ sera $I((x_A + x_B)/2; (y_A + y_B)/2)$.

3. Vecteurs colinéaires dans le plan

a) Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si $\vec{u} = \lambda \vec{v}$

$$\text{ou bien si } \det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b = 0.$$

b) M appartient à la droite (AB) si $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$

Application : Equation de la droite (AB) dans le plan, sachant que $A(1; 2)$ et $B(4; -3)$

$$M(x; y) \in (AB) \text{ si } \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ y-2 & -5 \end{vmatrix} = -5(x-1) - 3(y-2) = 0.$$

D'où l'équation cartésienne de la droite

$$(AB) \quad 5x + 3y - 11 = 0.$$

4. Vecteurs coplanaires dans l'espace

a) Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ sont coplanaires si $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ ou bien si

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - ac'b'' - ba'c'' - cb'a'' = 0 \quad (\text{Règle de Sarrus})$$

b) Dans l'espace, M appartient au plan (ABC) si $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

Application : Equation du plan (ABC) dans l'espace, sachant que $A(1 ; 2 ; -1)$, $B(4 ; -3 ; 1)$ et $C(-2 ; 2 ; 0)$.

$$\begin{aligned} M(x ; y ; z) \in (ABC) \text{ si } \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= \begin{vmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ y-2 & -5 & 0 \\ z+1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5(x-1) - 6(y-2) + 0 - 0 - 3(y-2) - 15(z+1) \\ &= -5x - 9y - 15z + 8 = 0 \end{aligned}$$

D'où l'équation cartésienne du plan

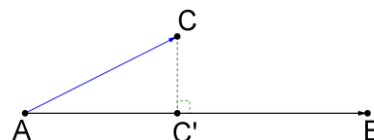
$$(ABC) \quad 5x + 9y + 15z - 8 = 0.$$

II. PRODUIT SCALAIRE

On se place ici dans le plan ou l'espace muni d'un repère orthonormal.

1. Définitions

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AC'}$ si C' est le projeté orthogonal de C sur (AB)



b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

c) En repère orthonormal, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \alpha\alpha' + \beta\beta'$ si $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$.

2. Propriétés

a) Le produit scalaire est commutatif $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ et distributif pour l'addition $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

b) La longueur du vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est sa norme notée $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ dans le plan et $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ dans l'espace. Donc : $\overline{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

c) $\overrightarrow{AB}$ perpendiculaire (orthogonal) à $\overrightarrow{AC}$ revient à dire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

III. PRODUIT VECTORIEL

1. Définitions

a) Si $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Sinon, si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ alors (AD) est perpendiculaire au plan (ABC), les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ forment un trièdre direct et $AD = AB \times AC \times \sin BAC$.

b) Si $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} bc'-cb' \\ -(ac'-ca') \\ ab'-ba' \end{pmatrix}$.

2. Propriétés

a) Le produit vectoriel vérifie $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$ et est distributif pour l'addition $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.

b) L'aire intérieure du triangle ABC vaut $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin BAC$.

IV. BARYCENTRE

1. Définition

Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont n réels tels que $a = \sum_{i=1}^n a_i \neq 0$ alors il existe un point G unique tel que $\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

On dit que G est le barycentre des $\{(A_i; a_i)\}$ ou des points A_i munis des masses (ou coefficients) a_i .

2. Propriétés

a) Pour tout point M on peut écrire : $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{MA_i}$. (relation barycentrique)

b) La relation barycentrique exprimée au point O donne les coordonnées du barycentre : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{OA_i}$.

c) On peut remplacer k points par leur barycentre affecté de la masse de ces points (associativité du barycentre).

Exemple : Construire le point G barycentre de $\{(A;2), (B;-1), (C;3)\}$.

Par associativité, G est barycentre de $\{(A;2), (K;2)\}$, c'est-à-dire le milieu de $[AK]$, avec K barycentre de $\{(B;-1), (C;3)\}$. La relation barycentrique en B permet de construire le point K :

$$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2} (-1 \cdot \overrightarrow{BB} + 3 \cdot \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{2} \overrightarrow{BC}$$

