

Séries de Fourier

Exercice 1

1. Un logiciel de calcul formel a donné les résultats suivants qui pourront être utilisés sans démonstration :

$$I_n(a) = \int_0^a t \cos(nt) dt = \frac{na \sin(na) + \cos(na) - 1}{n^2}$$

$$J_n(a) = \int_0^a t \sin(nt) dt = \frac{\sin(na) - na \cos(na)}{n^2}$$

En déduire ;

$$I_n(\pi), I_n(2\pi), J_n(\pi), J_n(2\pi).$$

2. Représenter sur l'intervalle $[-\pi ; 3\pi]$, les fonctions :

- a) f 2π -périodique, paire, $f(t) = t$ sur $[0 ; \pi]$
- b) g 2π -périodique, impaire, $g(t) = t$ sur $[0 ; \pi]$
- c) h 2π -périodique, $h(t) = t$ sur $[0 ; 2\pi]$

3. Déduire de la question 1 les coefficients de Fourier de ces trois fonctions.

4. Ecrire les développements en série de Fourier approché $\bar{f}$, $\bar{g}$, $\bar{h}$ de ces trois fonctions en ne conservant que les quatre premiers harmoniques et vérifier en les représentant sur calculatrice qu'elles approchent bien les fonctions initiales.

Exercice 2

Soit f la fonction de la variable x , 2π -périodique, impaire avec $f(0) = 0$ et $f(x) = \pi - x$ sur $]0 ; \pi]$.

$$\text{On donne : } \int_0^\pi (\pi - t) \sin(nt) dt = \frac{\pi}{n} - \frac{\sin(n\pi)}{n^2}$$

1. Représenter f sur l'intervalle $[-\pi ; 3\pi]$.

2. Coefficients de Fourier de f :

- a) Montrer que $a_n = 0$ pour tout $n \geq 0$
- b) Montrer que $b_n = \frac{2}{n}$ pour tout $n \geq 1$

3. Montrer que le développement en série de Fourier approché de cette fonction en ne conservant que les quatre premiers harmoniques est

$$g(t) = 2 \left(\frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(4t)}{4} \right)$$

4. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs

t	0	$\pi/5$	$2\pi/5$	$3\pi/5$	$4\pi/5$	π
$g(t)$						

5. En se servant de ces valeurs, représenter g sur le même graphique que f , d'abord sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ puis sur $[-\pi ; 3\pi]$.

Que peut-on dire de cette représentation par rapport à celle de f ?

Exercice 3

Soit f la fonction de la variable x , π -périodique, paire avec $f(x) = \pi - x$ sur $[0 ; \pi/2]$.

1. Représenter f sur l'intervalle $[-\pi ; 3\pi]$.

2. Coefficients de Fourier de f :

- a) Montrer que $a_0 = \frac{3\pi}{4}$
- b) On donne $a_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2\pi}$ pour tout $n \geq 1$
- c) Montrer que $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$

3. Montrer que le développement en série de Fourier approché de cette fonction en ne conservant que les quatre premiers harmoniques est

$$g(x) = \frac{3\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \cos(2x) + \frac{2}{9\pi} \cos(6x)$$

4. Représenter la fonction g à l'aide de la calculatrice. Que peut-on dire de la qualité de cette représentation ?

5. Valeur efficace de f .

- a) Montrer que la valeur efficace de f est

$$E_f^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (f(x))^2 dx = \frac{7}{12} \pi^2$$

- b) Calculer

$$A = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (a_i^2 + b_i^2)$$

- c) Calculer les valeurs approchées à 0,01 près de E_f^2 et de A . Commenter.

Exercice 4

Soit f la fonction de la variable t , 2π -périodique, $f(t) = t$ sur $[0 ; \pi]$ et $f(t) = 0$ sur $[\pi ; 2\pi]$.

1. Représenter f sur l'intervalle $[-\pi ; 3\pi]$.

2. Coefficients de Fourier de f .

On donne les résultats :

$$\int_0^\pi t \cos(nt) dt = \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2} \quad \text{et} \quad \int_0^\pi t \sin(nt) dt = \frac{-\pi \cos(n\pi)}{n}$$

- a) Montrer que $a_0 = \frac{\pi}{4}$
- b) Montrer que $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2\pi}$ pour tout $n \geq 1$
- c) Montrer que $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ pour tout $n \geq 1$

3. Ecrire le développement en série de Fourier approché g de cette fonction en ne conservant que le fondamental et les quatre premiers harmoniques.

4. Représenter la fonction g à l'aide de la calculatrice.

Exercice 5

Soit f la fonction de la variable x , 4 -périodique, impaire, $f(x) = x$ sur $[0; 1]$, $f(x) = 1$ sur $[1; 2]$.

1. Représenter f sur l'intervalle $[-2; 6]$.

2. Coefficients de Fourier de f .

a) Montrer que $a_n = 0$ pour tout $n \geq 0$

b) Les autres coefficients de Fourier sont (admis) :

n	1	2	3	4
b_n	$\frac{2\pi + 4}{\pi^2}$	$-\frac{1}{\pi}$	$\frac{6\pi - 4}{9\pi^2}$	$-\frac{1}{2\pi}$

3. Ecrire le développement en série de Fourier approché g de cette fonction en ne conservant que le fondamental et les quatre premiers harmoniques.

4. Représenter la fonction g à l'aide de la calculatrice et commenter.

5. Valeur efficace de f .

a) Montrer que la valeur efficace de f est

$$E_f^2 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 (f(x))^2 dx = \frac{2}{3}$$

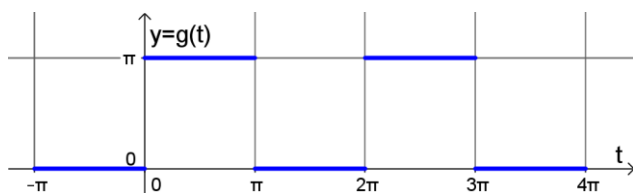
b) Calculer

$$A = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (a_i^2 + b_i^2)$$

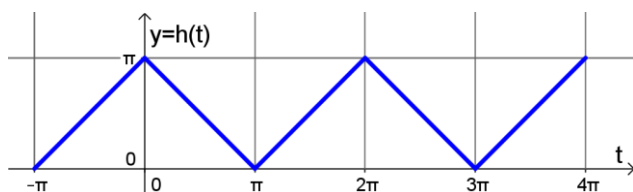
c) Calculer les valeurs approchées à 0,01 près de E_f^2 et de A . Commenter.

Exercice 6

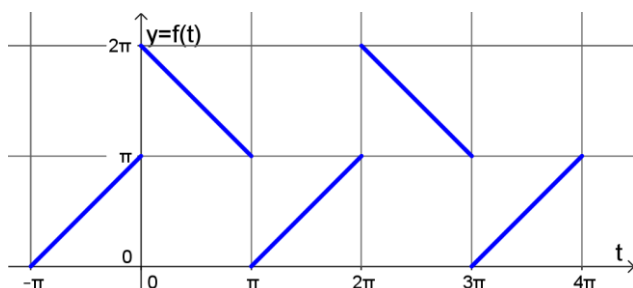
Soit le signal g 2π -périodique de représentation



Le signal h 2π -périodique de représentation



Le signal f 2π -périodique de représentation



1.a) Déterminer l'équation de g sur les intervalles $[-\pi; 0]$, puis $[0; \pi]$. g est-elle paire ou impaire ?

b) Déterminer l'équation de h sur l'intervalle $[-\pi; 0]$, puis $[0; \pi]$. h est-elle paire ou impaire ?

c) Montrer que la fonction f sur les intervalles $[-\pi; 0]$, puis $[0; \pi]$ vérifie $f(x) = g(x) + h(x)$. f est-elle paire ou impaire ?

2. Coefficients de Fourier de g .

Un logiciel de calcul formel a donné :

$$\int_0^\pi \pi \cos(nt) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\pi \pi \sin(nt) dt = \frac{\pi}{n} (1 - \cos(n\pi))$$

a) Montrer que $a_{g0} = \frac{\pi}{2}$

b) Montrer que $a_{gn} = 0$ pour $n \geq 1$

c) Montrer que $b_{gn} = (1 - (-1)^n) \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$

3. Coefficients de Fourier de h .

Un logiciel de calcul formel a donné :

$$\int_0^\pi (\pi - t) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2} (1 - \cos(n\pi))$$

d) Montrer que $a_{h0} = \frac{\pi}{2}$

e) Montrer $a_{hn} = (1 - (-1)^n) \frac{1}{n^2 \pi}$ pour $n \geq 1$

f) Montrer que $b_{hn} = 0$ pour $n \geq 1$

4. Quatre premiers harmoniques

a) Compléter le tableau des premiers harmoniques de g :

n	1	2	3	4
a_{gn}				
b_{gn}				

b) Compléter le tableau des premiers harmoniques de h :

n	1	2	3	4
a_{hn}				
b_{hn}				

c) En déduire, à l'aide de la remarque 1c, que le tableau des premiers harmoniques de f est :

n	1	2	3	4
a_{fn}				
b_{fn}				

5.a) Ecrire le développement en série de Fourier approché $\bar{f}$ de cette fonction en ne conservant que le fondamental et les quatre premiers harmoniques.

b) Représenter la fonction $\bar{f}$ à l'aide de la calculatrice.

c) Cette représentation est-elle tout à fait satisfaisante ? Sinon qu'est-ce qu'il aurait fallu faire pour l'améliorer ?