

Exercices Transf. Laplace

Exercice 1

On considère le système linéaire :



où s est le signal de sortie du signal d'entrée e , toutes les deux fonctions causales (nulles quand $t < 0$) de la variable t .

On définit la fonction de transfert $H(p)$ du système par $S(p) = H(p) \times E(p)$, où E et S sont les transformées de Laplace de e et s avec $E(p) = \frac{1}{p+1}$.

U est la fonction échelon unité, $U(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Tracer la courbe représentative de e sachant que

$$e(t) = U(t) - 2U(t-1) + U(t-2)$$

2. Montrer que la transformée de Laplace de e est

$$E(p) = \frac{1}{p} - 2\frac{1}{p}e^{-p} + \frac{1}{p}e^{-2p}$$

3. Déterminer les réels a et b tels que

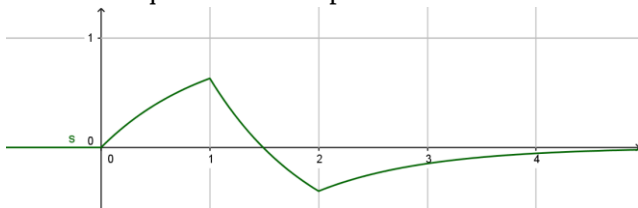
$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+1}$$

4. Déterminer l'original de $\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$, puis l'original de $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)e^{-\alpha p}$, pour $\alpha > 0$.

5. Déterminer $S(p)$ et en déduire que

$$s(t) = (1 - e^{-t})U(t) - 2(1 - e^{1-t})U(t-1) + (1 - e^{2-t})U(t-2)$$

6. Montrer que la courbe représentative de s est



Exercice 2

Soit f la fonction de la variable t , dérivable pour $t \geq 0$ avec $f(0) = 0$ et vérifiant

$$2f'(t) + f(t) = 2$$

1. Déterminer la transformée de Laplace F de f .
2. Déterminer les constantes réelles a et b telles que

$$\frac{2}{p(2p+1)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+\frac{1}{2}}$$

3. Déterminer l'expression de $f(t)$.

Exercice 3 B99

Soit f la fonction de la variable t , deux fois dérivable pour $t \geq 0$ avec $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$ et vérifiant

$$f''(t) - 2f'(t) + f(t) = \frac{1}{2}t^2 - t - 1$$

1. Déterminer la transformée de Laplace F de f .
2. Montrer que F peut se mettre sous la forme

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^2}$$

3. Déterminer l'expression de $f(t)$.

Exercice 4 B00

Soit f la fonction de la variable t , deux fois dérivable pour $x \geq 0$ avec $f(0) = \frac{4}{3}$, $f'(0) = -\frac{4}{3}$ et vérifiant

$$f''(x) - 4f(x) = -\frac{16}{3}e^{-2x}$$

1. Montrer que la transformée de Laplace de f est

$$F(p) = \frac{4}{3} \left(\frac{p-1}{(p^2-4)} - 4 \frac{1}{(p+2)(p^2-4)} \right)$$

2. Montrer que F peut se mettre sous la forme

$$F(p) = \frac{4}{3} \frac{p+3}{(p+2)^2}$$

3. Déterminer les réels a et b tels que

$$\frac{p+3}{(p+2)^2} = \frac{a}{(p+2)^2} + \frac{b}{p+2}$$

4. Montrer alors que $f(x) = \frac{4}{3}(x+1)e^{-2x}$.

Exercice 5 B01

Soit f la fonction de la variable x , dérivable pour $x \geq 0$ avec $f(0) = -1$, et vérifiant

$$f'(x) - 2f(x) = e^{2x}.$$

1. Montrer que la transformée de Laplace de f est

$$F(p) = \frac{1}{(p-2)^2} - \frac{1}{p-2}$$

2. En déduire l'expression de $f(x)$.

Exercice 6 B03

Soit f la fonction de la variable x , dérivable pour $x \geq 0$ avec $f(0) = 3$, et vérifiant

$$f'(x) + f(x) = 2e^{-x}.$$

1. Montrer que la transformée de Laplace de f est

$$F(p) = \frac{2}{(p+1)^2} + \frac{3}{p+1}$$

2. En déduire l'expression de $f(x)$.

Exercice 7 B02

Soit f la fonction de la variable t , deux fois dérivable pour $t \geq 0$ avec $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ et vérifiant

$$f''(t) - f'(t) - 2f(t) = (-6t - 4)e^{-t}$$

1. Montrer que la transformée de Laplace de f est

$$F(p) = \frac{p^3 + 2p^2 - 3p - 10}{(p-2)(p+1)^3}$$

2. Montrer que F peut se mettre sous la forme

$$F(p) = \frac{2}{(p+1)^3} + \frac{2}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+1}$$

3. Montrer alors que $f(x) = (t+1)^2 e^{-t}$.

Exercice 8 B06

Soit f la fonction de la variable t , deux fois dérivable pour $x \geq 0$ avec $f(0) = 2$, $f'(0) = -1$ et vérifiant

$$f''(x) - 3f'(x) - 4f(x) = -5e^{-x}$$

1. Montrer que la transformée de Laplace de f vérifie

$$(p^2 - 3p - 4)F(p) = \frac{2p^2 - 5p - 12}{p+1}$$

2. En déduire que

$$F(p) = \frac{2}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}$$

3. En déduire l'expression de $f(x)$.

Exercice 9 B07

Soit f la fonction de la variable t , dérivable pour $x \geq 0$ avec $f(0) = 0$, et vérifiant

$$f'(t) + 710f(t) = 710.$$

1. Montrer que la transformée de Laplace de f est

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{710}{p+710}$$

2. En déduire l'expression de $f(t)$.

Exercice 10 B08

Soit f la fonction de la variable x , dérivable pour $x \geq 0$ avec $f(0) = 0$, et vérifiant

$$f'(x) - 2f(x) = xe^x.$$

1. Montrer que la transformée de Laplace de f est

$$F(p) = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p-1}$$

2. En déduire l'expression de $f(x)$.

Exercice 11 B09

Soit f la fonction de la variable x , deux fois dérivable pour $x \geq 0$ avec $f(0) = -4$, $f'(0) = -4$ et vérifiant

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 8e^x$$

1. Montrer que la transformée de Laplace de f vérifie

$$(p-1)^2 F(p) = 4 \left(\frac{2}{p-1} - (p-1) \right)$$

2. En déduire l'expression de $f(x)$.

Exercice 12 B10

Soit f la fonction de la variable t , dérivable pour $t \geq 0$ avec $f(0) = 3$ et vérifiant

$$f'(t) - f(t) = e^t - 2t$$

1. Montrer que la transformée de Laplace de f vérifie

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{2}{p^2(p-1)} + \frac{3}{p-1}$$

2. En déduire que

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p-1} + \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p}$$

3. Déterminer l'expression de $f(t)$.

Exercice 13

On cherche la trajectoire d'un mobile dont la position à l'instant t est donnée par le point $M(x(t); y(t))$. Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ de la variable t , sont dérivables pour $t \geq 0$ avec $x(0) = 0$, $y(0) = 4$ et vérifient le système différentiel

$$(S) \begin{cases} 3x'(t) = -4x(t) + 8y(t) \\ 12y'(t) = x(t) - 20y(t) \end{cases}$$

1. Montrer que les transformées de Laplace de x et de y vérifient le système d'équations

$$\begin{cases} (3p+4)X(p) - 8Y(p) = 0 \\ -X(p) + 4(3p+5)Y(p) = 36 \end{cases}$$

2. Montrer que la solution de ce système peut se mettre sous la forme

$$\begin{cases} X(p) = 8 \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} \right) \\ Y(p) = \frac{1}{p+1} + 2 \frac{1}{p+2} \end{cases}$$

3. En déduire $x(t)$ et $y(t)$.

4. Préciser alors la trajectoire du mobile en étudiant la courbe paramétrée $(x(t); y(t))$ pour $t \in [0; 5]$.