

Exercices EquaDiff

Exercice 1 : Premier ordre

y étant une fonction de la variable x , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, résoudre les équations différentielles :

- a) $y' + 2y = 0$
- b) $2y' - 3y = 0$
- c) $2y' - y = 0$

Exercice 2 : 1er ordre et condition initiale

y étant chaque fois une fonction de la variable x , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, trouver les fonctions f , g et h solutions des équations différentielles :

- a) $y' - 2y = 0$ vérifiant $f(0) = 2$;
- b) $2y' - 3y = 0$ vérifiant $f(1) = 2$;
- c) $2y' - y = 0$ vérifiant $f(0) = 1$.

Exercice 3

On considère la fonction y de la variable x , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation différentielle

$$(E) \quad xy' + (x - 2)y = 2e^{-x}$$

1. Résoudre l'équation différentielle

$$(E_0) \quad xy' + (x - 2)y = 0$$

en remarquant que $\frac{x-2}{x} = 1 - \frac{2}{x}$.

- 2. Montrer que la fonction $h(x) = -e^{-x}$ est une solution particulière de (E).
- 3. Donner la solution générale de (E).
- 4. Déterminer la fonction f solution de (E) et vérifiant $f(1) = e^{-1}$.

Exercice 4

Soit la fonction y de la variable x , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + xy = x^2e^{-x}$$

1. Résoudre l'équation différentielle

$$(E_0) \quad y' + xy = 0$$

- 2. Déterminer les réels a et b tels que la fonction $h(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit solution particulière de (E)
- 3. Donner la solution générale de (E).
- 4. Déterminer la fonction f solution de (E) et vérifiant $f(0) = 0$.

Exercice 5

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + y = \frac{1}{e^x - 1}$$

où y est une fonction de la variable x , définie et dérivable pour $x > 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle

$$(E_0) \quad y' + y = 0$$

2. On cherche une fonction $u(x)$ telle que la fonction $h(x) = u(x)e^{-x}$ soit solution particulière de (E).

a) Montrer que $u'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$;

b) En déduire l'expression de $h(x)$.

3. Donner la solution générale de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la fonction f solution de (E) et vérifiant $f(\ln 2) = 1$.

Exercice 6 : Second ordre

y étant une fonction de la variable x , définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, résoudre les équations différentielles :

- a) $y'' + y - 2 = 0$
- b) $4y'' - 12y' + 9y = 0$
- c) $y'' - 4y' + 13 = 0$

Exercice 7

y est une fonction de la variable x , définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + y' - 2y = -2x^2 + 2x + 4$$

1. Résoudre l'équation différentielle

$$(E_0) \quad y'' + y' - 2y = 0$$

- 2. Déterminer trois réels a , b et c tels que la fonction $h(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution particulière de (E)
- 3. Donner la solution générale de l'équation différentielle (E).
- 4. Déterminer la fonction f solution de (E) et vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Exercice 8 : Système différentiel

$x(t)$ et $y(t)$ sont deux fonctions de la variable t , définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} x' = 2y & (1) \\ y' = x + y + 4 & (2) \end{cases}$$

avec les conditions initiales $x(0) = -1$ et $y(0) = 0$.

- 1. Déterminer $x'(0)$.
- 2. A partir de l'équation différentielle (1), exprimer y' en fonction de x'' .
- 3. A l'aide de l'équation différentielle (2), montrer alors que $x(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad x'' - x' - 2x = 8$$

4.a) Résoudre l'équation différentielle

$$(E_0) \quad x'' - x' - 2x = 0$$

b) Déterminer une fonction constante $h(x)$ solution particulière de (E).

c) Donner la solution générale de (E).

d) Déterminer la fonction $x(t)$ solution de (E) et vérifiant $x(0) = -1$ et $x'(0) = 0$.

5. En déduire, à l'aide de l'équation différentielle (1), l'expression de la fonction $y(t)$.